RELATION BINAIRE

Exercice 1 :

Soit $E = \{1,2,3,4\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E dont le graphe est

$$\Gamma = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$$

1. Vérifier que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Faire la liste des classes d'équivalences distinctes et donner l'ensemble quotient $R/\mathcal{R}$.

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :

1. Montrer que la relation de congruence modulo n
$$a \equiv b \quad [n] \Leftrightarrow n \text{ divise } b - a$$
Est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. En vous servant de la division euclidienne, montrer qu'il y a exactement n classes d'équivalentes distinctes.

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :

Sur $\mathbb{R}^2$, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Décrire la classe d'équivalence $\dot{(a,b)}$ du couple (a,b).
3. On désigne par $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ l'ensemble quotient pour cette relation. Montrer que l'application
$$\mathbb{R}^2/\mathcal{R} \to [0,+\infty[$$
$$\dot{(a,b)} \longmapsto a^2 + b^2$$
Est bien définie et que c'est une bijection.

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :

Soient E et F deux ensembles et $f: E \to F$ une application. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur E en posant, pour tout $(x,x') \in E \times E$,

$$x\mathcal{R}x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Décrire la classe $\dot{x}$ de l'élément $x \in E$.
3. Pourquoi l'application
$$E/\mathcal{R} \to F$$
$$\dot{x} \mapsto f(x)$$

Est-elle bien définie ? Montrer qu'elle est injective. Que peut-on conclure sur l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$?

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

Soit E un ensemble et soit A une partie de E. On définit dans $\mathcal{P}(E)$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ en posant, pour tout couple (X,Y) de parties de E :

$$X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y$$

1. Expliciter les classes $\dot{\emptyset}$, $\dot{E}$, $\dot{A}$ et $\dot{C_E A}$.
2. Montrer que si $B = A \cap X$, alors B est l'unique représentant de $\dot{X}$ contenu dans A.
3. Expliciter une bijection entre $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ et $\mathcal{P}(A)$.

Remarque : ne pas hésiter, si nécessaire, à expliciter les classes pour un cas particulier, par exemple $E = \{1,2,3,4\}$ et $A = \{1,2\}$.
Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

Soit $\mathbb{P}^*$ l'ensemble des nombres premiers strictement supérieurs à 2. On considère la relation $\mathcal{R}$ entre deux éléments de $\mathbb{P}^*$ définie par :

$$p\mathcal{R}q \Leftrightarrow \frac{p+q}{2} \in \mathbb{P}^*$$

La relation est-elle réflexive, symétrique et transitive ?
Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

Soient E un ensemble fini non vide et x un élément fixé de E. Les relations $\sim$ définies ci-dessous sont-elles des relations d'équivalences sur $\mathcal{P}(E)$?

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \sim B \Leftrightarrow A = B$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \sim B \Leftrightarrow A \subset B$
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \sim B \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$
4. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \sim B \Leftrightarrow (A \cap B = \emptyset \text{ } ou \text{ } A \cup B \neq \emptyset)$
5. Soit $x \in E, \forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \sim B \Leftrightarrow x \in A \cup B$
6. Soit $x \in E, \forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \sim B \Leftrightarrow \left(x \in A \cap B \text{ } ou \text{ } x \in \overline{A} \cap \overline{B}\right)$

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

Dans $\mathbb{N}^*$, on définit une relation $\ll$ en posant

$$m \ll n \text{ s'il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = km$$

1. Montrer que $\ll$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.
   On considère dans la suite de l'exercice que l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est ordonné par la relation $\ll$.
2. L'ensemble $\mathbb{N}^*$ possède-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?
3. Soit $A = \{4,5,6,7,8,9,10\}$. L'ensemble A possède-t-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ?

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

Dans $\mathbb{N}^*$, on définit une relation $\ll$ en posant pour tout $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$:

$$x \ll y \text{ s'il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } y = x^n$$

1. Montrer que $\ll$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.

On considère dans la suite de l'exercice que l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est ordonné par la relation $\ll$.

2. Soit $A = \{2,4,16\}$. Déterminer le plus grand élément et le plus petit élément de A.

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

Dans $\mathbb{R}^2$, on définit la relation $\ll$ en posant $(x, y) \ll (x', y') \Leftrightarrow x < x'$ ou $(x = x'$ et $y \leq y')$

1. Montrer que $\ll$ est une relation d'ordre. Est-ce une relation d'ordre total ?
2. Déterminer l'ensemble des majorants et des minorants du singleton $\{(a, b)\}$ et représenter les dans $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $X = \{(a, b), (c, d)\}$. Déterminer Sup X et Inf X.

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :

Soient E un ensemble fini non vide et x un élément fixé de E. Les relations $\mathcal{R}$ définies ci-dessous sont-elles des relations d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$?

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A = B$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A\mathcal{R}B \Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B}$
4. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A\mathcal{R}B \Leftrightarrow x \in A \cup \overline{B}$
5. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \left(x \in A = B \text{ } ou \text{ } x \in A \cap \overline{B}\right)$

Allez à : Correction exercice 11 :

Exercice 12 :

Les relations $\mathcal{R}$ définies ci-dessous sont-elles des relations d'ordre sur $\mathbb{R}$.

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x < y$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow e^x \leq e^y$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x| \leq |y|$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N}$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$

Allez à : Correction exercice 12 :

Exercice 13 :

Montrer que la relation binaire définie par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) \leq f(x)$$

Est une relation d'ordre.

Allez à : Correction exercice 13 :

Exercice 14 :

Les relations $\mathcal{R}$ défines ci-dessous sont-elles des relations d'équivalence sur $\mathbb{C}$?

1. $z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$
2. $z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow \left|\frac{z}{z'}\right| = 1$
3. $z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow e^z = e^{z'}$
4. $z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z - z'| = 1$
5. $z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow e^{|z-z'|} = 1$

Allez à : Correction exercice 14 :

Exercice 15 :

Soit $\mathcal{R}$, la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de x pour tout réel x.
3. Déterminer l'ensemble quotient.

Allez à : Correction exercice 15 :

Exercice 16 :

Soit $\mathcal{E}$ la relation définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$x\mathcal{E}y \Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$$

Montrer que $\mathcal{E}$ est une relation d'ordre total.

Allez à : Correction exercice 16 :

Exercice 17 :

1. Soit $a \in \mathbb{C}^*$, déterminer en fonction de a l'ensemble des complexes tels que $z^4 = a^4$.

Soit $\mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$

On définit sur $\mathcal{U}_{12}$ la relation $z \sim z' \Leftrightarrow z^4 = z'^4$

2. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{U}_{12}$.
3. Décrire l'ensemble des classes d'équivalence.

Allez à : Correction exercice 17 :

Exercice 18 :

On définit sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relation

$$(a,b) \preccurlyeq (c,d) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b < c+d \\ \text{ou} \\ a+b = c+d \quad \text{et} \quad b \leq d \end{cases}$$

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.
2. On admettra qu'il s'agit d'une relation d'ordre totale. Classer par ordre croissant les dix premiers couples de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ muni de la relation d'ordre $\preccurlyeq$.

Allez à : Correction exercice 18 :

Exercice 19 :

Soient $\mathcal{R}$ une relation définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par :

$$(a,b)\mathcal{R}(a',b') \Leftrightarrow ab' = a'b$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. soit $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, avec $p \wedge q = 1$, décrire la classe d'équivalence de (p,q).

Allez à : Correction exercice 19 :

Exercice 20 :

Soit $\ll$ la relation définie sur $\mathbb{N}^2$ par :

$$(a,b) \ll (a',b') \Leftrightarrow \begin{cases} a < a' \\ ou \\ a = a' \; et \; b \leq b' \end{cases}$$

Montrer que $\ll$ est une relation d'ordre total.

Allez à : Correction exercice 20 :

Exercice 21 :

Soit E un ensemble.

On pose $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

On définit dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E , la relation $\mathcal{R}$, en posant, pour tout couple (A,B) de parties de E :

$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A\Delta B$ est un ensemble fini ayant un nombre fini pair d'élément.

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{P}(E)$.

Allez à : Correction exercice 21 :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

1. D'après le graphe, on a :

$$1\mathcal{R}1;\ 1\mathcal{R}2;\ 2\mathcal{R}1;\ 2\mathcal{R}2;\ 3\mathcal{R}3;\ 3\mathcal{R}4;\ 4\mathcal{R}3 \text{ et } 4\mathcal{R}4$$

Pour tout $n \in \{1,2,3,4\}$ on a $n\mathcal{R}n$ donc la relation est réflexive. On a $1\mathcal{R}2$ et $2\mathcal{R}1$ d'une part et $3\mathcal{R}4$ et $4\mathcal{R}3$ ce qui montre que la relation est symétrique et évidemment elle est transitive, donc il s'agit d'une relation d'équivalence.

2. Il y a deux classes d'équivalence $E_1 = \{1,2\}$ et $E_2 = \{3,4\}$ par conséquent

$$R/\mathcal{R} = \{E_1, E_2\}$$

Allez à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :

1. n divise $a - a = 0$ car existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $0 = kn$, il suffit de prendre $k = 0$, par conséquent

$$a \equiv a \ \ [n]$$

$\equiv$ est réflexive.

Si $a \equiv b \ \ [n]$ alors n divise $b - a$, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b - a = kn$, ce qui entraine que $a - b = (-k)n$, $-k \in \mathbb{Z}$ donc $a - b$ divise n, autrement dit $b \equiv a \ \ [n]$.

$\equiv$ est symétrique.

Si $\begin{cases} a \equiv b & [n] \\ b \equiv c & [n] \end{cases}$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $l \in \mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} b - a = kn \\ c - b = ln \end{cases}$, en faisant la somme de ces deux égalités $b - a + c - b = kn + ln \Leftrightarrow c - a = (k + l)n$, comme $k + l \in \mathbb{Z}$, n divise $c - a$, autrement dit $c \equiv a \ \ [n]$.

$\equiv$ est transitive.

Finalement $\equiv$ est une relation d'équivalence.

2. Soit $m \in \mathbb{Z}$, effectuons la division euclidienne de m par n. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \{0,1, \dots, n - 1\}$ tel que $m = qn + r$, donc $m - r = qn$ autrement dit $m \equiv r \ \ [n]$. Il y a exactement n classes d'équivalence $\left\{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\right\}$.

Allez à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :

1.

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow (a, b)\mathcal{R}(a, b)$$

$\mathcal{R}$ est réflexive.

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \Rightarrow c^2 + d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow (c, d)\mathcal{R}(a, b)$$

$\mathcal{R}$ est symétrique.

$$\begin{cases} (a, b)\mathcal{R}(c, d) \\ (c, d)\mathcal{R}(e, f) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \\ c^2 + d^2 = e^2 + f^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = e^2 + f^2 \Rightarrow (a, b)\mathcal{R}(e, f)$$

$\mathcal{R}$ est transitive.

Finalement $\mathcal{R}$est une relation d'équivalence.

2.

$$(x, y) \in (\dot{a, b}) \Leftrightarrow (x, y)\mathcal{R}(a, b) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

Si on pose $R^2 = a^2 + b^2$ alors $x^2 + y^2 = R^2$, donc la classe de (a, b) est le cercle de centre $(0,0)$ de rayon R. Si $(a, b) = (0,0)$ la classe de (a, b) est réduite à $(0,0)$ (c'est un cercle un peu spécial).

3. On appelle φ cette « application », en fait cela sera une application lorsque l'on aura montré que lorsque que l'on change de représentant la valeur de φ ne change pas, c'est ce que l'énoncé veut dire en demandant de montrer que φ est bien définie.

Précisons un peu : si on a $(\dot{a',b'}) = (\dot{a,b})$ ce qui équivaut à $(a',b')\mathcal{R}(a,b)$ (si ce n'est pas évident pour vous, réfléchissez un peu et vous verrez c'est évident) et si $\left((\dot{a',b'})\right) \neq \varphi((\dot{a,b})\ )$ on voit bien que cela pose un problème dans la définition de φ.

Si $(\dot{a',b'}) = (\dot{a,b})$ alors $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$ donc $\varphi\left((\dot{a',b'})\right) = a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 = \varphi\left((\dot{a,b})\ \right)$, tout va bien φ est bien définie.

Remarque :

Si $\varphi\left((\dot{a,b})\right) = ab$ alors φ n'est pas une application.

Montrons que φ est une bijection.

Pout tout $y \in [0, +\infty[$ il faut montrer qu'il existe une unique classe $(\dot{a,b})$ tel que $y = \varphi\left((\dot{a,b})\ \right)$

$$y = \varphi\left((\dot{a,b})\ \right) \Leftrightarrow y = a^2 + b^2$$

Soit il est évident que tous les couples (a,b) qui vérifie $y = a^2 + b^2$ sont dans la même classe, soit on fait l'effort de le montrer, ce que nous allons faire.

Un couple solution est $(\sqrt{y}, 0)$ car $\left(\sqrt{y}\right)^2 + 0^2 = y$. Soit (a,b) un autre couple solution on a alors $y = a^2 + b^2$

Mais comme $\left(\sqrt{y}\right)^2 + 0^2 = a^2 + b^2$ on en déduit que $(\dot{\sqrt{y}, 0}) = (\dot{a,b})$, cela montre qu'il n'y a qu'une classe $(\dot{a,b})$ telle que $y = \varphi\left((\dot{a,b})\ \right)$, φ est bijective.

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 4 :

1.

$$f(x) = f(x) \Rightarrow x\mathcal{R}x$$

$\mathcal{R}$ est réflexive.

$$x\mathcal{R}x' \Rightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow f(x') = f(x) \Rightarrow x'\mathcal{R}x$$

$\mathcal{R}$ est symétrique.

$$\begin{cases} x\mathcal{R}x' \\ x'\mathcal{R}x'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = f(x') \\ f(x') = f(x'') \end{cases} \Rightarrow f(x) = f(x'') \Rightarrow x\mathcal{R}x''$$

$\mathcal{R}$ est transitive.

Finalement $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Pour tout $y \in \dot{x}$, $y\mathcal{R}x$ et donc $f(y) = f(x)$ donc

$$\dot{x} = \{y \in E, f(y) = f(x)\}$$

3. Notons φ cette « application », c'est le même problème que dans l'exercice précédent, pour une classe on doit le même résultat quel que soit le représentant de la classe, si on a $\dot{x} = \dot{x'}$ a-t-on forcément $\varphi(\dot{x}) = \varphi(\dot{x'})$?

$\dot{x} = \dot{x'} \Leftrightarrow f(x') = f(x)$ donc $\varphi(\dot{x}) = f(x) = f(x') = \varphi(\dot{x'})$, tout va bien, φest bien définie, autrement dit φ est une application.

Montrons que φ est injective.

$$\varphi(\dot{x}) = \varphi\left(\dot{x'}\right) \Leftrightarrow f(x) = f(x') \Leftrightarrow \dot{x} = \dot{x'}$$

Donc φ est injective.

Allez à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

Ici on ne demande pas de montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

1.

$$X \in \dot{\emptyset} \Leftrightarrow A \cap \emptyset = A \cap X \Leftrightarrow A \cap X = \emptyset \Leftrightarrow X \subset C_E A$$

$$\dot{\emptyset} = \{X \in \mathcal{P}(E), X \subset C_E A\}$$

$$X \in \dot{E} \Leftrightarrow A \cap E = A \cap X \Leftrightarrow A \cap X = A \Leftrightarrow A \subset X$$
$$\dot{E} = \{X \in \mathcal{P}(E), X \subset C_E A\}$$
$$X \in \dot{A} \Leftrightarrow A \cap A = A \cap X \Leftrightarrow A \cap X = A \Leftrightarrow X \subset A$$
$$\dot{A} = \{X \in \mathcal{P}(E), X \subset A\}$$
$$X \in \dot{C_E A} \Leftrightarrow A \cap C_E A = A \cap X \Leftrightarrow A \cap X = \emptyset \Leftrightarrow X \subset C_E A$$
$$\dot{C_E A} = \{X \in \mathcal{P}(E), X \subset C_E A\}$$

Remarque : $\dot{\emptyset} = \dot{C_E A}$

2. Montrons que $B = A \cap X \in \dot{X}$:

$$A \cap B = A \cap (A \cap X) = (A \cap A) \cap X = A \cap X$$

Donc $B \in \dot{X}$, il est clair que $B \subset A$, mais est-ce le seul ?

Soit $B' \in \dot{X}$ et $B' \subset A$, $A \cap X = A \cap B' = B'$ car $B' \subset A$ ce qui entraine que $B' = A \cap X$.

$B = A \cap X$ est le seul élément de la classe de X qui soit inclus dans A.

3. On rappelle que $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ est l'ensemble des classes pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}$.

On pose $\varphi: \mathcal{P}(E)/\mathcal{R} \to \mathcal{P}(A)$ définie par $\varphi(\dot{X}) = A \cap X$.

Est-ce que φ est bien définie ? Si on prends $\dot{X}' = \dot{X}$ a-t-on $\varphi(\dot{X}) = \varphi(\dot{X}')$?

$$\dot{X}' = \dot{X} \Leftrightarrow A \cup X = A \cap X'$$

Donc

$$\varphi(\dot{X}') = A \cap X' = A \cup X = \varphi(\dot{X})$$

Tout va bien.

Pour tout $B \subset A$ on cherche s'il existe un unique $\dot{X} \in \mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ tel que $B = \varphi(\dot{X})$?

D'après la question 2. $B = A \cap X$ est le seul élément de la classe de X qui soit inclus dans A, c'est parfait c'est exactement ce que l'on voulait. φ est bijective.

Allez à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

Pour tout $p \in \mathbb{P}^*$

$$\frac{p+p}{2} = p \in \mathbb{P}^* \Leftrightarrow p\mathcal{R}q$$

$\mathcal{R}$ est réflexive.

$$p\mathcal{R}q \Rightarrow \frac{p+q}{2} \in \mathbb{P}^* \Rightarrow \frac{q+p}{2} \in \mathbb{P}^* \Rightarrow q\mathcal{R}p$$

$\mathcal{R}$ est symétrique.

Cherchons un peu

$$\begin{cases} p\mathcal{R}q \\ q\mathcal{R}r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{p+q}{2} \in \mathbb{P}^* \\ \dfrac{q+r}{2} \in \mathbb{P}^* \end{cases}$$

Il faudrait pouvoir en déduire que $\frac{p+r}{2} \in \mathbb{P}^*$ et à ce moment là on doit se dire que cela n'a pas l'air évident et que donc, puisque l'énoncé demande « la relation est-elle transitive ? » et non pas « montrer que la relation est transitive » il se peut que la réponse soit « non », on va donc chercher un contre-exemple, pour cela on va faire un tableau.

$\frac{p+q}{2}$	3	5	7	11	13	17
3	3	4	5	7	8	10
5	4	5	6	8	9	11
7	5	6	7	9	10	12
11	7	8	9	11	12	14
13	8	9	10	12	13	15
17	10	11	12	14	15	17

On a coché en jaune les cases des couples (p,q) en relation.

On a $11\mathcal{R}7$ et $7\mathcal{R}5$ et pourtant 11 n'est pas en relation avec 5.

Remarque :

Pour trouver un contre-exemple il faut qu'il y ait au moins deux cases cochées en jaune autre que celle de la case $p\mathcal{R}p$, donc sur ce tableau l'exemple cité est le seul contre-exemple, pour en trouver d'autre il faudrait faire un tableau plus grand.

Allez à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

1. $A = A \Leftrightarrow A \sim A$ donc $\sim$ est réflexive

   $A \sim B \Rightarrow A = B \Rightarrow B = A \Rightarrow B \sim A$ donc $\sim$ est symétrique.

   $\begin{cases} A \sim B \\ B \sim C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B \\ B = C \end{cases} \Rightarrow A = C \Rightarrow A \sim C$ donc $\sim$ est transitive.

   Cette relation est une relation d'équivalence.

Allez à : Exercice 7 :

2. $A \subset A \Leftrightarrow A \sim A$ donc $\sim$ est réflexive.

   $\begin{cases} A \sim B \\ B \sim C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset C \end{cases} \Rightarrow A \subset C \Rightarrow A \sim C$ donc $\sim$ est transitive.

   Mais si $A \subsetneq B$ alors $A \sim B$ mais $B \not\subset A$ donc on n'a pas $B \sim A$ donc la relation n'est pas symétrique.

   Cette relation n'est pas une relation d'équivalence.

Remarque : il était inutile de montrer que cette relation était réflexive et transitive.

Allez à : Exercice 7 :

3. Si $A \neq \emptyset$ alors $A \cap A \neq \emptyset$ donc cette relation n'est pas réflexive.

   Donc ce n'est pas une relation d'équivalence, on va tout de même regarder les deux autres propriétés.

   $A \sim B \Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow B \cap A = \emptyset \Rightarrow B \sim A$ donc cette relation est symétrique.

   $$\begin{cases} A \sim B \\ B \sim C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = \emptyset \\ B \cap C = \emptyset \end{cases}$$

   Cela n'entraine pas que $A \cap C = \emptyset$, prenons un exemple $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$ et $C = \{1,5\}$.

   Cette relation n'est pas transitive.

Allez à : Exercice 7 :

4. Il vaut mieux réfléchir un peu avant de se lancer, comment peuvent être deux ensembles A et B qui ne vérifient pas $A \cup B \neq \emptyset$? C'est clair il faut que ces deux ensembles soient tous les deux égal à l'ensemble vide, mais alors $A \cap B = \emptyset$. Il semble bien que pour tout ensemble A et B on ait $A \sim B$, démontrons cela.

   Soient A et B deux ensembles :

   Si $A = \emptyset$ alors $A \cap B = \emptyset$ et donc $A \sim B$.

   Si $A \neq \emptyset$ alors $A \cup B \neq \emptyset$ et donc $A \sim B$.

   La relation binaire $\sim$ est une relation d'équivalence, si vous n'êtes pas convaincu :

   $A \sim A$ donc $\sim$ est réflexive.

   Si $A \sim B$ alors $B \sim A$ ($B \sim A$ étant vraie pour tout B et pour tout A). Donc $\sim$ est symétrique.

   Si $A \sim B$ et si $B \sim C$ alors $A \sim C$ ($A \sim C$ étant vraie pour tout A et pour tout C). Donc $\sim$ est transitive.

Remarque :

Il n'y a qu'une seule classe d'équivalence.

Allez à : Exercice 7 :

5. Si $x \notin A$ alors $x \notin A \cup A$ et donc on n'a pas $A \sim A$, $\sim$ n'est pas réflexive.
Par conséquent $\sim$ n'est pas une relation d'équivalence.

Allez à : Exercice 7 :

6. Soit $x \in E$, $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $A \sim B \Leftrightarrow \left(x \in A \cap B \text{ } ou \text{ } x \in \overline{A} \cap \overline{B}\right)$
$x \in A = A \cup A$ ou $x \in \overline{A} = \overline{A} \cap \overline{A}$ donc $A \sim A$, ce qui signifie que $\sim$ est réflexive.
$A \sim B \Rightarrow \left(x \in A \cap B \text{ } ou \text{ } x \in \overline{A} \cap \overline{B}\right) \Rightarrow \left(x \in B \cap A \text{ } ou \text{ } x \in \overline{B} \cap \overline{A}\right) \Rightarrow B \sim A$, la relation $\sim$ est donc symétrique.
$$\begin{cases} A \sim B \\ B \sim C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cap B \text{ } ou \text{ } x \in \overline{A} \cap \overline{B} \\ x \in B \cap C \text{ } ou \text{ } x \in \overline{B} \cap \overline{C} \end{cases} \Rightarrow x \in \left((A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)\right) \cap \left((B \cap C) \cup \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right)\right)$$
Or
$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) &= \left(A \cup \overline{A}\right) \cap \left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(B \cup \overline{A}\right) \cap \left(B \cup \overline{B}\right) = E \cap \left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(B \cup \overline{A}\right) \cap E \\ &= \left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(B \cup \overline{A}\right)\end{aligned}$$
De même
$$(B \cap C) \cup \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) = \left(B \cup \overline{C}\right) \cap \left(\overline{B} \cup C\right)$$
Donc
$$\begin{aligned}\left((A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)\right) \cap \left((B \cap C) \cup \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right)\right) &= \left(\left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(B \cup \overline{A}\right)\right) \cap \left(\left(B \cup \overline{C}\right) \cap \left(\overline{B} \cup C\right)\right) \\ &= \left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(B \cup \overline{A}\right) \cap \left(B \cup \overline{C}\right) \cap \left(\overline{B} \cup C\right) \\ &= \left(\left(B \cup \overline{A}\right) \cap \left(B \cup \overline{C}\right)\right) \cap \left(\left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(\overline{B} \cup C\right)\right) = \left(B \cup \left(\overline{A} \cap \overline{C}\right)\right) \cap \left(\overline{B} \cup (A \cap C)\right) \\ &= \left(B \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap (A \cap C)\right) \cup \left(\left(\overline{A} \cap \overline{C}\right) \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{C} \cap A \cap C\right) \\ &= \emptyset \cup \left(B \cap (A \cap C)\right) \cup \left(\left(\overline{A} \cap \overline{C}\right) \cap \overline{B}\right) \cup \left(\left(\overline{A} \cap A\right) \cap \left(\overline{C} \cap C\right)\right) \\ &= \left(B \cap (A \cap C)\right) \cup \left(\left(\overline{A} \cap \overline{C}\right) \cap \overline{B}\right) \cup (\emptyset \cap \emptyset) = (A \cap B \cap C) \cup \left(\left(\overline{A \cup C}\right) \cap \overline{B}\right) \cup \emptyset \\ &= (A \cap B \cap C) \cup \left(\overline{A \cup C \cup B}\right)\end{aligned}$$
Or $A \cap B \cap C \subset A \cap C$ et $A \cup C \cup B \supset A \cup C \Rightarrow \overline{A \cup B \cup C} \subset \overline{A \cup C}$ donc
$$(A \cap B \cap C) \cup \left(\overline{A \cup C \cup B}\right) \subset (A \cap C) \cup \left(\overline{A \cup C}\right) = (A \cap C) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{C}\right)$$
Par conséquence :
$$x \in (A \cap C) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{C}\right)$$
Et alors
$$A \sim C$$
Ce qui montre que $\sim$ est transitive et finalement $\sim$ est une relation d'équivalence.

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

1.
Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = kn$, il suffit de prendre $k = 1$, donc $n \ll n$.
$\ll$ est réflexive.
Si $\begin{cases} m \ll n \\ n \ll m \end{cases}$ alors il existe $k, l \in \mathbb{N}^*$ tels que $\begin{cases} n = km \\ m = k'n \end{cases}$, d'où $n = kk'n$, en simplifiant par $n \neq 0$, $1 = kk'$.
k et k' sont deux entiers positifs, la seul solution est $k = k' = 1$, on en déduit que $m = n$.
$\ll$ est antisymétrique.

Si $\begin{cases} l \ll m \\ m \ll n \end{cases}$ alors il existe $k, k' \in \mathbb{N}^*$ tels que $\begin{cases} m = kl \\ n = k'm \end{cases}$, d'où $n = k'kl$, comme $k'k \in \mathbb{N}^*$ on a $l \ll n$.
$\ll$ est transitive.
Finalement $\ll$ est une relation d'ordre partiel.
Remarque :
$\ll$ n'est pas une relation d'ordre totale car il y a des couples de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ qui ne sont pas en relation, par exemple on a ni $2 \ll 3$ ni $3 \ll 2$.

2. Supposons que $\mathbb{N}^*$ admette un plus grand élément noté N alors $2N = kN$ avec $k = 2 \in \mathbb{N}^*$ donc $N \ll 2N$ ce qui signifie que $2N$ est plus grand (au sens de $\ll$) que N ce qui est contradictoire puisque N est le plus grand, donc il n'y a pas de plus grand élément.

Remarque préliminaire : si $m \ll n$ alors $m \leq n$ puisque $n = km$ avec $k \geq 1$ donc $n \geq m$.
S'il y a un plus petit élément cela ne peut être que le plus petit élément de $\mathbb{N}^*$ au sens de $\leq$, c'est-à-dire 1. Est-ce que 1 est le plus petit élément au sens de $\ll$?
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $k = n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = k \times 1$ donc $1 \ll n$, c'est bon 1 est le plus petit élément de $\mathbb{N}^*$.
Remarque :
$\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers supérieur ou égal à 2 n'a pas de plus petit élément puisque 2 ne vérifie pas $2 \ll n \Leftrightarrow n = k \times 2$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Avec la remarque préliminaire du 2. le seul plus petit élément de A possible est 4 mais il n'existe pas de $k \in \mathbb{N}^*$ tel que : $5 = k \times 4$. Il n'y a pas de plus petit élément (On a pris 5 mais on aurait pu prendre 5,6,7,9 ou 10.
De même le seul plus grand élément possible serait 10 mais il n'existe pas de $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $10 = k \times 7$ (on a pris 7 mais on aurait pu prendre 4,6,7,8 ou 9.

Allez à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{N}^*$
Il existe $n = 1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = x^1$ donc $x \ll x$.
$\ll$ est réflexive.
S'il existe $n, n' \in \mathbb{N}^*$ tels que $\begin{cases} y = x^n \\ x = y^{n'} \end{cases}$ alors $y = \left(y^{n'}\right)^n = y^{nn'}$ donc $nn' = 1$, comme n et n' sont des entiers positifs, la seule solution est $n = n' = 1$, par conséquent $y = x$.
$\ll$ est antisymétrique.
Si $\begin{cases} x \ll y \\ y \ll z \end{cases}$ il existe $n, n' \in \mathbb{N}^*$ tels que $\begin{cases} y = x^n \\ z = y^{n'} \end{cases}$ alors $z = (x^n)^{n'} = x^{nn'}$ comme $nn' \in \mathbb{N}^*$ on a $x \ll z$.
$\ll$ est une relation d'ordre partiel.

Remarque :
Ce n'est pas une relation d'ordre totale car il y a des couples (x, y) qui ne sont pas en relation, par exemple on a ni $2 \ll 3$ ni $3 \ll 2$.

2. Remarque : si $x \ll y$ alors $x \leq y$ car il existe $n \in \mathbb{N}^*$ $(n \geq 1)$ tel que $y = x^n = x \times \ldots \times x \geq x$ car $x \geq 1$.
Le seul plus petit élément possible est 2.
$$4 = 2^2 \Rightarrow 2 \ll 4$$
$$16 = 2^4 \Rightarrow 2 \ll 16$$
Donc 2 est le plus petit élément de $\{2,4,16\}$
Le seul plus grand élément est 16.
$$16 = 2^4 \Rightarrow 2 \ll 16$$
$$16 = 4^2 \Rightarrow 4 \ll 16$$

Donc 16 est le plus grand élément de $\{2,4,16\}$

Remarque :

$\{2,4,16\}$ est un ensemble totalement ordonné pour la relation d'ordre $\ll$, autrement dit $\ll$ est une relation d'ordre totale (sur cet ensemble).

Allez à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

1. $(x = x \text{ et } y \leq y)$ donc $(x,y) \ll (x,y)$.

   $\ll$ est réflexive.

$$\begin{cases}(x,y) \ll (x',y') \\ (x',y') \ll (x,y)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y') \\ x' < x \text{ ou } (x' = x \text{ et } y' \leq y)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x < x' \\ x' < x\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x < x' \\ x' = x \text{ et } y' \leq y\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x = x' \text{ et } y \leq y' \\ x' < x\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x = x' \text{ et } y \leq y' \\ x' = x \text{ et } y' \leq y\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x = x' \text{ et } y \leq y' \\ x' = x \text{ et } y' \leq y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = x' \\ y = y'\end{cases} \Rightarrow (x,y) = (x',y')$$

   $\ll$ est antisymétrique.

$$\begin{cases}(x,y) \ll (x',y') \\ (x',y') \ll (x'',y'')\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y') \\ x' < x'' \text{ ou } (x' = x'' \text{ et } y' \leq y'')\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x < x' \\ x' < x''\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x < x' \\ x' = x'' \text{ et } y' \leq y''\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x = x' \text{ et } y \leq y' \\ x' < x''\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x = x' \text{ et } y \leq y' \\ x' = x'' \text{ et } y' \leq y''\end{cases}$$

$$\Rightarrow (x < x'') \text{ ou } (x < x'' \; et \; y' < y'') \text{ ou } (x < x'' \; et \; y' < y'') \text{ ou } (x = x'' \; et \; y \leq y'')$$

$$\Rightarrow (x < x'') \text{ ou } (x = x'' \; et \; y \leq y'') \Rightarrow (x,y) \ll (x'',y'')$$

   $\ll$ est transitive.

   Finalement $\ll$ est une relation d'ordre (partiel).

   Est-ce que cette relation est une relation d'ordre total ?

   Considérons deux couples (x,y) et (x',y').

   Il y a plusieurs cas :

   Si $x < x'$ alors $(x,y) \ll (x',y')$

   Si $x > x'$ alors $(x',y') \ll (x,y)$

   Si $x = x'$ et $y < y'$ alors $(x,y) \ll (x',y')$

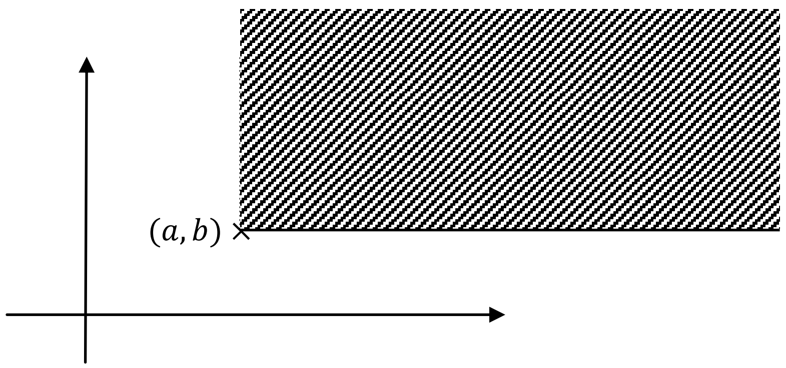
   Si $x = x'$ et $y > y'$ alors $(x',y') \ll (x,y)$

   Si $x = x'$ et $y = y'$ alors $(x,y) = (x',y')$ (on a $(x,y) \ll (x',y')$ et $(x',y') \ll (x,y)$)

   Tous les couples sont comparables, $\ll$ est une relation d'ordre total.

2. On cherche tous les couples (x,y) tels que $(a,b) \ll (x,y)$, ce sont les couples qui vérifient :

$$\begin{cases}a < x \\ a = x \text{ et } b \leq y\end{cases}$$



   Il s'agit d'un quart de plan limité en bas par la demi-droite $x \geq a$ et $y = b$ (demi-droite comprise) et à gauche par la demi-droite $x = a$ et $y \geq b$ (demi-droite non comprise).

   L'ensemble des couples (x,y) tel que $(x,y) \ll (a,b)$ est le complémentaire de ce quart de plan.

3. $X = \{(a,b),(c,d)\}$
   Si $a < c$ alors $\inf(X) = (a,b)$ et $\sup(X) = (c,d)$.
   Si $a > c$ alors $\inf(X) = (c,d)$ et $\sup(X) = (a,b)$.
   Si $a = c$ et $b < d$ alors $\inf(X) = (a,b)$ et $\sup(X) = (c,d)$.
   Si $a = c$ et $b > d$ alors $\inf(X) = (c,d)$ et $\sup(X) = (a,b)$.
   Si $a = c$ et $b = d$ alors $\inf(X) = \sup(X) = (a,b) = (c,d)$.

Allez à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

1. $A = A \Rightarrow A\mathcal{R}A$ la relation est réflexive.
   $\begin{cases} A\mathcal{R}B \\ B\mathcal{R}A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B \\ B = A \end{cases} \Rightarrow A = B$ la relation est antisymétrique.
   $\begin{cases} A\mathcal{R}B \\ B\mathcal{R}C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B \\ B = C \end{cases} \Rightarrow A = C \Rightarrow A\mathcal{R}C$ la relation est transitive.
   Il s'agit bien d'une relation d'ordre.

Allez à : Exercice 11 :

2. $A \subset A \Rightarrow A\mathcal{R}A$ la relation est réflexive.
   $\begin{cases} A\mathcal{R}B \\ B\mathcal{R}A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases} \Rightarrow A = B$, la relation est antisymétrique.
   $\begin{cases} A\mathcal{R}B \\ B\mathcal{R}C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset C \end{cases} \Rightarrow A \subset C \Rightarrow A\mathcal{R}C$ la relation est transitive.
   Il s'agit bien d'une relation d'ordre.

Allez à : Exercice 11 :

3. $A \cap \overline{A} = \emptyset$ donc on n'a pas $x \in A \cap \overline{A}$, la relation n'est pas réflexive, et ce n'est pas une relation d'équivalence.
   Regardons tout de même les deux autres propriétés.
   $$\begin{cases} A\mathcal{R}B \\ B\mathcal{R}A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \cap \overline{B} \\ x \in B \cap \overline{A} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(A \cap \overline{B}\right) \cap \left(B \cap \overline{A}\right) = A \cap \overline{B} \cap B \cap \overline{A} = \left(A \cap \overline{A}\right) \cap \left(B \cap \overline{B}\right) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$
   On ne peut avoir $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}A$ donc la relation n'est pas antisymétrique.
   $\begin{cases} A\mathcal{R}B \\ B\mathcal{R}C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cap \overline{B} \\ x \in B \cap \overline{C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \overline{C} \end{cases} \Rightarrow x \in A \cap \overline{C} \Rightarrow A\mathcal{R}C$, la relation est transitive.

Allez à : Exercice 11 :

4. $x \in E = A \cup \overline{A}$ donc $A\mathcal{R}A$, la relation est réflexive.
   $$\begin{cases} A\mathcal{R}B \\ B\mathcal{R}A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \cup \overline{B} \\ x \in B \cup \overline{A} \end{cases}$$
   On est mal parti pour en déduire que $A = B$, il faut trouver un contre exemple.
   Soient A contenant x et B contenant x, et tel que A ne soit pas inclus dans B et que B ne soit pas inclus dans A.
   $x \in A \subset A \cup \overline{B}$ donc $A\mathcal{R}B$, $x \in B \subset B \cup \overline{A}$ donc $B\mathcal{R}A$ et pourtant $A \neq B$. La relation n'est pas antisymétrique.
   Donc la relation n'est pas une relation d'ordre, regardons tout de même la transitivité.
   $$\begin{cases} A\mathcal{R}B \\ B\mathcal{R}C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cup \overline{B} \\ x \in B \cup \overline{C} \end{cases} \Rightarrow x \in \left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(B \cup \overline{C}\right) = (A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{B} \cap B\right) \cup \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right)$$
   $$= (A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{C}\right) \cup \emptyset \cup \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) = (A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right)$$
   $$A \cap B \subset A$$
   $$A \cap \overline{C} \subset A$$
   $$\overline{B} \cap \overline{C} \subset \overline{C}$$
   Donc

$$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{C})\cup(\overline{B}\cap\overline{C})\subset A\cup A\cup\overline{C}=A\cup\overline{C}$$

On en déduit que $x\in A\cup\overline{C}$, on a alors $A\mathcal{R}C$. La relation est transitive.

Allez à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

1. $x<x$ est faux donc la relation n'est pas réflexive, ce n'est pas une relation d'équivalence.

Allez à : Exercice 12 :

2. $x\le x\Leftrightarrow x\mathcal{R}x$, la relation est réflexive.

$\begin{cases}x\mathcal{R}y\\y\mathcal{R}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le y\\y\le x\end{cases}\Rightarrow x=y$, la relation est antisymétrique.

$\begin{cases}x\mathcal{R}y\\y\mathcal{R}z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le y\\y\le z\end{cases}\Rightarrow x\le z\Rightarrow x\mathcal{R}z$, la relation est transitive.

$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

Remarque : cette relation est une relation d'ordre totale puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$ et pour tout $y\in\mathbb{R}$, soit $x\le y$, soit $y\le x$.

Allez à : Exercice 12 :

3. $e^x\le e^x\Leftrightarrow x\mathcal{R}x$, la relation est réflexive.

$\begin{cases}x\mathcal{R}y\\y\mathcal{R}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e^x\le e^y\\e^y\le e^x\end{cases}\Rightarrow e^x=e^y\Rightarrow x=y$, la relation est antisymétrique.

$\begin{cases}x\mathcal{R}y\\y\mathcal{R}z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e^x\le e^y\\e^y\le e^z\end{cases}\Rightarrow e^x\le e^z\Rightarrow x\mathcal{R}z$, la relation est transitive.

$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

Remarque : cette relation est une relation d'ordre totale puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$ et pour tout $y\in\mathbb{R}$, soit $e^x\le e^y$, soit $e^y\le e^y$.

Allez à : Exercice 12 :

4. $|x|\le|x|\Leftrightarrow x\mathcal{R}x$, la relation est réflexive.

$$\begin{cases}x\mathcal{R}y\\y\mathcal{R}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|\le|y|\\|y|\le|x|\end{cases}\Leftrightarrow|x|=|y|$$

C'est mal parti pour affirmer que $x=y$, il faut trouver un contre exemple.

$$\begin{cases}(1)\mathcal{R}(-1)\\(-1)\mathcal{R}(1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|1|\le|-1|\\|-1|\le|1|\end{cases}$$

Et évidemment $-1\ne1$, la relation n'est pas antisymétrique.

Allez à : Exercice 12 :

5. $x-x=0\in\mathbb{N}$ donc $x\mathcal{R}x$, la relation est réflexive.

$$\begin{cases}x\mathcal{R}y\\y\mathcal{R}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y\in\mathbb{N}\\y-x\in\mathbb{N}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\exists k\in\mathbb{N},\ \ x-y=k\\\exists k'\in\mathbb{N},\ \ y-x=k'\end{cases}\Rightarrow 0=(x-y)+(y-x)=k+k'$$

Si la somme de deux entiers positifs est nul, c'est que ces deux entiers sont nuls, par conséquent $k=k'=0$.

Donc $x-y=0\Rightarrow x=y$. La relation est antisymétrique.

$$\begin{cases}x\mathcal{R}y\\y\mathcal{R}z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y\in\mathbb{N}\\z-y\in\mathbb{N}\end{cases}$$

$x-z=(x-y)+(y-z)\in\mathbb{N}\Leftrightarrow x\mathcal{R}z$, la relation est transitive.

Finalement est une relation d'ordre.

Remarque : Cette relation n'est pas une relation d'ordre totale car $\frac{3}{2}$ et 1 (par exemple) ne sont pas en relation, c'est une relation d'ordre partielle.

Allez à : Exercice 12 :

6. $x-x=0\in\mathbb{Z}$ donc $x\mathcal{R}x$, la relation est réflexive.

$$\begin{cases}x\mathcal{R}y\\y\mathcal{R}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y\in\mathbb{Z}\\y-x\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\exists k\in\mathbb{Z},\ \ x-y=k\\\exists k'\in\mathbb{Z},\ \ y-x=k'\end{cases}$$

C'est mal parti, rien n'indique que $x = y$, prenons un contre-exemple.

$$\begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 4 \in \mathbb{Z} \\ y - x = -4 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{cases}$$

Et pourtant $x \neq y$. La relation n'est pas antisymétrique.

Ce n'est pas une relation d'ordre. Regardons si elle est transitive (par curiosité).

$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y \in \mathbb{N} \\ z - y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x\mathcal{R}z$, la relation est transitive.

Allez à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

$f(x) \leq f(x)$ entraine que $x\mathcal{R}x$, la relation est réflexive.

Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ alors $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(x)$ alors $f(x) = f(y)$, f est strictement monotone donc f est injective, par conséquent $x = y$, ce qui signifie que $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(z)$ donc $f(x) \leq f(z)$ ce qui signifie que $x\mathcal{R}z$, $\mathcal{R}$ est transitive. On pourrait montrer que c'est une relation d'ordre totale.

Allez à : Exercice 13 :

Correction exercice 14 :

1. $x^2 - x^2 = x - x$ donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

Si $x\mathcal{R}y$ alors $x^2 - y^2 = x - y$ alors $y^2 - x^2 = y - x$ alors $y\mathcal{R}x$ donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x^2 - y^2 = x - y$ et $y^2 - z^2 = y - z$, en additionnant ces deux égalités on trouve $x^2 - z^2 = x - z$. $\mathcal{R}$ est transitive.

Finalement $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Soit $x \in \dot{a}$ si $x\mathcal{R}a$ c'est-à-dire si $x^2 - a^2 = x - a \Leftrightarrow x^2 - x + a - a^2 = 0$ autrement dit si x est solution de l'équation du second degré $X^2 - X + a - a^2 = 0$, évidemment a est solution, le produit des solutions est $a - a^2 = a(1 - a)$ donc l'autre solution est $1 - a$. Donc $\dot{a} = \{a, 1 - a\}$ sauf si $a = \frac{1}{2}$ alors $\dot{\frac{1}{2}} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
3. L'ensemble quotient est l'ensemble des classes d'équivalence :

$$\mathbb{R}/\mathcal{R} = \left\{\{a, 1 - a\}, a \geq \frac{1}{2}\right\}$$

On est obligé de considérer $a \geq \frac{1}{2}$ (ou $a \leq \frac{1}{2}$) car pour $a \geq \frac{1}{2}$, $1 - a \leq \frac{1}{2}$ donc si on considère $a \in \mathbb{R}$, on écrirait deux fois chaque classe.

Allez à : Exercice 14 :

Correction exercice 15 :

1. $|z| = |z| \Leftrightarrow z\mathcal{R}z$, la relation est réflexive.

$z\mathcal{R}z' \Rightarrow |z| = |z'| \Rightarrow |z'| = |z| \Rightarrow z'\mathcal{R}z$, la relation est symétrique.

$\begin{cases} z\mathcal{R}z' \\ z'\mathcal{R}z'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ |z'| = |z''| \end{cases} \Rightarrow |z| = |z''| \Rightarrow z\mathcal{R}z''$, la relation est transitive, il s'agit donc d'une relation d'équivalence.

Allez à : Exercice 15 :

2. Il y a un piège parce que sur $\mathbb{C}^*$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = 1 \Leftrightarrow |z| = |z'|$ et on vient de voir au 1°) qu'il s'agit une relation d'équivalence, le problème est en $z = 0$. La réflexivité dit que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $z\mathcal{R}z$, ce qui est faux pour $z = 0$ car $\left|\frac{0}{0}\right|$ n'a pas de sens.

Ce n'est pas une relation d'équivalence.

Allez à : Exercice 15 :

3. $e^z = e^z \Leftrightarrow z\mathcal{R}z$, la relation est réflexive.

   $z\mathcal{R}z' \Rightarrow e^z = e^{z'} \Rightarrow e^{z'} = e^z \Rightarrow z'\mathcal{R}z$, la relation est symétrique.

   $\begin{cases} z\mathcal{R}z' \\ z'\mathcal{R}z'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^z = e^{z'} \\ e^{z'} = e^{z''} \end{cases} \Rightarrow e^z = e^{z''} \Rightarrow z\mathcal{R}z''$, la relation est transitive. Il s'agit d'une relation d'équivalence.

Allez à : Exercice 15 :

4. $|z-z| = 0 \neq 1$ donc on n'a pas $z\mathcal{R}z$, la relation n'est pas réflexive et ce n'est donc pas une relation d'équivalence.

   Regardons tout de même les autres propriétés.

   $z\mathcal{R}z' \Rightarrow |z-z'| = 1 \Rightarrow |z'-z| = 1 \Rightarrow z'\mathcal{R}z$, la relation est symétrique.

$$\begin{cases} z\mathcal{R}z' \\ z'\mathcal{R}z'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z-z'| = 1 \\ |z'-z''| = 1 \end{cases}$$

   On ne voit pas bien pourquoi on aurait $|z-z''| = 1$.

   On prend $z = 1$, $z' = 0$ et $z'' = i$

   $\begin{cases} |z-z'| = |1-0| = 1 \\ |z'-z''| = |0-i| = 1 \end{cases}$ et $|z-z''| = |1-i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, la relation n'est pas transitive.

Allez à : Exercice 15 :

5. $|e^{z-z}| = |e^0| = 1 \Leftrightarrow z\mathcal{R}z$, la relation est réflexive.

$$z\mathcal{R}z' \Rightarrow \left|e^{z-z'}\right| = 1 \Rightarrow \left|e^{-(z'-z)}\right| = 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{e^{z'-z}}\right| = 1 \Rightarrow \left|e^{z'-z}\right| = 1 \Rightarrow z'\mathcal{R}z$$

   la relation est symétrique.

$$\begin{cases} z\mathcal{R}z' \\ z'\mathcal{R}z'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|e^{z-z'}\right| = 1 \\ \left|e^{z'-z''}\right| = 1 \end{cases} \Rightarrow \left|e^{z-z'}\right| \times \left|e^{z'-z''}\right| = 1 \times 1 \Rightarrow \left|e^{z-z'} \times e^{z'-z''}\right| = 1 \Rightarrow \left|e^{z-z'+z'-z''}\right| = 1$$
$$\Rightarrow \left|e^{z-z''}\right| = 1 \Rightarrow z\mathcal{R}z''$$

   la relation est transitive, il s'agit donc d'une relation d'équivalence.

Allez à : Exercice 15 :

Correction exercice 16 :

Première méthode

$\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{x}{1+x^2}$ donc $x\mathcal{E}x$, $\mathcal{E}$ est réflexive.

Si $x\mathcal{E}y$ et $y\mathcal{E}x$ alors $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$ et $\frac{y}{1+y^2} \geq \frac{x}{1+x^2}$ donc $\frac{x}{1+x^2} = \frac{y}{1+y^2} \Leftrightarrow x(1+y^2) = y(1+x^2) \Leftrightarrow x - y + xy^2 - yx^2 = 0 \Leftrightarrow x - y + xy(y-x) = 0 \Leftrightarrow x - y - xy(x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(1-xy) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$ car $x > 1$ et $y > 1$ entraine $1 - xy < 0$ en particulier $1 - xy \neq 0$. Donc $\mathcal{E}$ est antisymétrique.

Si $x\mathcal{E}y$ et $x\mathcal{E}z$ alors $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$ et $\frac{y}{1+y^2} \geq \frac{z}{1+z^2}$ donc $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{z}{1+z^2}$, d'où $x\mathcal{E}z$. $\mathcal{E}$ est transitive.

Finalement $\mathcal{E}$ est une relation d'ordre.

Soit $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$ et alors $x\mathcal{R}y$, soit $\frac{y}{1+y^2} \geq \frac{x}{1+x^2}$ et alors $y\mathcal{R}x$, il s'agit d'une relation d'ordre total.

Deuxième méthode

Soit $f:]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$, $f'(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} < 0$ donc f est décroissante sur $]1,+\infty[$

Donc $x\mathcal{E}y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y) \Leftrightarrow x \leq y$, $\leq$ est une relation d'ordre total donc $\mathcal{E}$ est une relation d'ordre total

Allez à : Exercice 16 :

Correction exercice 17 :

1.

$$z^4=a^4\Leftrightarrow\left(\frac{z}{a}\right)^4=1\Leftrightarrow\frac{z}{a}\in\{1,-1,i,-i\}$$

Donc

$$z=a;z=-a;z=ia;z=-ia$$

Ou

$$z\in\left\{a,ae^{\frac{i\pi}{2}},ae^{i\pi},ae^{\frac{3i\pi}{2}}\right\}$$

2. $z^4=z^4\Rightarrow z\sim z$ cette relation est réflexive.
$z\sim z'\Rightarrow z^4=z'^4\Rightarrow z'^4=z^4\Rightarrow z'\sim z$ cette relation est réflexive.
$\begin{cases}z\sim z'\\ z'\sim z''\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z^4=z'^4\\ z'^4=z''^4\end{cases}\Rightarrow z^4=z''^4\Rightarrow z\sim z''$ cette relation est transitive.
Donc $\sim$ est une relation d'équivalence.
3. Remarque : $\sim$ est aussi une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$, pas seulement sur $\mathcal{U}_{12}$.On rappelle que les éléments de $\mathcal{U}_{12}$ sont les complexes $z_k=e^{\frac{ik\pi}{6}}$, $k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$
Regardons la classe de 1

$$\dot{1}=\{z\in\mathcal{U}_{12},z^4=1\}=\{1,i,-1,-i\}=\left\{e^{\frac{ik\pi}{6}},k\in\{0,3,6,9\}\right\}$$

Regardons la classe de $e^{\frac{i\pi}{6}}$

$$\dot{\overline{e^{\frac{i\pi}{6}}}}=\left\{z\in\mathcal{U}_{12},z^4=e^{\frac{i\pi}{6}}\right\}=\left\{e^{\frac{i\pi}{6}},e^{\frac{i\pi}{2}}e^{\frac{i\pi}{6}},e^{i\pi}e^{\frac{i\pi}{6}},e^{\frac{3i\pi}{2}}e^{\frac{i\pi}{6}}\right\}=\left\{e^{\frac{i\pi}{6}},e^{\frac{4i\pi}{6}},e^{\frac{7i\pi}{6}},e^{\frac{10i\pi}{6}}\right\}$$
$$=\left\{e^{\frac{ik\pi}{6}},k\in\{1,4,7,10\}\right\}$$

Regardons la classe de $e^{\frac{2i\pi}{6}}=e^{\frac{i\pi}{3}}$

$$\dot{\overline{e^{\frac{i\pi}{3}}}}=\left\{z\in\mathcal{U}_{12},z^4=e^{\frac{i\pi}{3}}\right\}=\left\{e^{\frac{i\pi}{3}},e^{\frac{i\pi}{2}}e^{\frac{i\pi}{3}},e^{i\pi}e^{\frac{i\pi}{3}},e^{\frac{3i\pi}{2}}e^{\frac{i\pi}{3}}\right\}=\left\{e^{\frac{2i\pi}{6}},e^{\frac{5i\pi}{6}},e^{\frac{8i\pi}{6}},e^{\frac{11i\pi}{6}}\right\}$$
$$=\left\{e^{\frac{ik\pi}{6}},k\in\{2,5,8,11\}\right\}$$

Et c'est fini. Il y a trois classes de 4 éléments (cela fait bien 12 éléments).

Allez à : Exercice 17 :

Correction exercice 18 :

1.

$$a+b=a+b\Rightarrow\begin{cases}a+b<a+b\\ \text{ou}\\ a+b=a+b\ \text{ et }\ b\le b\end{cases}\Rightarrow(a,b)\preccurlyeq(a,b)$$

Cette relation est réflexive.

$$\begin{cases}(a,b)\preccurlyeq(c,d)\\ (c,d)\preccurlyeq(a,b)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b<c+d\ \text{ ou }\ (a+b=c+d\ \text{ et }\ b\le d)\\ \text{et}\\ c+d<a+b\ \text{ ou }\ (c+d=a+b\ \text{ et }\ d\le b)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b<c+d\\ \text{et}\\ c+d<a+b\end{cases}\text{ou}\begin{cases}a+b<c+d\\ \text{et}\\ c+d=a+b\ \text{ et }\ d\le b\end{cases}\text{ou}\begin{cases}a+b=c+d\ \text{ et }\ b\le d\\ \text{et}\\ c+d<a+b\end{cases}\text{ou}\begin{cases}a+b=c+d\ \text{ et }\ b\\ \text{et}\\ c+d=a+b\ \text{ et }\ d\end{cases}$$

Les trois premiers systèmes n'ont pas de solutions donc

$$\begin{cases}(a,b)\preccurlyeq(c,d)\\ (c,d)\preccurlyeq(a,b)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=c+d\ \text{ et }\ b\le d\\ \text{et}\\ c+d=a+b\ \text{ et }\ d\le b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=c+d\\ \text{et}\\ d=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\ \text{et}\\ d=b\end{cases}\Leftrightarrow(a,b)=(c,d)$$

Cette relation est antisymétrique.

$$\begin{cases}(a,b)\preccurlyeq(c,d)\\(c,d)\preccurlyeq(e,f)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b<c+d \text{ ou } (a+b=c+d \text{ et } b\le d)\\ \text{et}\\ c+d<e+f \text{ ou } (c+d=e+f \text{ et } d\le f)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b<c+d\\ \text{et}\\ c+d<e+f\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}a+b<c+d\\ \text{et}\\ c+d=e+f \text{ et } d\le f\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}a+b=c+d \text{ et } b\le d\\ \text{et}\\ c+d<e+f\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}a+b=c+d \text{ et } b\\ \text{et}\\ c+d=e+f \text{ et } d\end{cases}$$

$$\Rightarrow (a+b<e+f) \text{ ou } (a+b<e+f) \text{ ou } (a+b<e+f) \text{ ou } (a+b=e+f \quad et \quad b\le d)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b<e+f\\ \text{ou}\\ a+b=e+f \text{ et } b\le f\end{cases}\Rightarrow (a,b)\preccurlyeq(e,f)$$

Cette relation est transitive.

Il s'agit bien d'une relation d'ordre.

2.

$$(0,0)\preccurlyeq(1,0)\preccurlyeq(0,1)\preccurlyeq(2,0)\preccurlyeq(1,1)\preccurlyeq(0,2)\preccurlyeq(3,0)\preccurlyeq(2,1)\preccurlyeq(1,2)\preccurlyeq(0,3)$$

Allez à : Exercice 18 :

Correction exercice 19 :

1. $ab=ab$ donc $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$, $\mathcal{R}$ est réflexive.
   $(a,b)\mathcal{R}(a',b')\Rightarrow ab'=a'b\Rightarrow a'b=ab'\Rightarrow(a',b')\mathcal{R}(a,b)$ donc $\mathcal{R}$ est symétrique.
   Si $(a,b)\mathcal{R}(a',b')$ et $(a',b')\mathcal{R}(a'',b'')$ alors $\begin{cases}ab'=a'b\\a'b''=a''b'\end{cases}$ alors $\begin{cases}a'=\frac{ab'}{b}\\a'b''=a''b'\end{cases}$ car $b\neq 0$
   Donc $\frac{ab'}{b}b''=a''b'$, on multiplie par b et on simplifie par $b'\neq 0$, on a alors $ab''=a''b$, c'est-à-dire $(a,b)\mathcal{R}(a'',b'')$, donc $\mathcal{R}$ est transitive.
   $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Si $(a,b)\in\overset{\cdot}{\overbrace{(p,q)}}\Leftrightarrow aq=pb$, donc q divise bq et $q\wedge p=1$ d'après le théorème de Gauss q divise b, il existe $d\in\mathbb{Z}$ tel que $b=dq$, cela que l'on remplace dans $aq=pb$, ce qui donne $aq=pdq$, $q\neq 0$ donc $a=dp$, l'ensemble des couples de $\overset{\cdot}{\overbrace{(p,q)}}$ sont les couples de la forme (dp,dq).

Allez à : Exercice 19 :

Correction exercice 20 :

$$\begin{cases}a=a\\b=b\end{cases}\Rightarrow\{a=a \; et\; b\le b \text{ donc }\begin{cases}a<a\\ ou\\ a=a\; et\; b\le b\end{cases} \text{ d'où } (a,b)\ll(a,b), \ll \text{ est réflexive.}$$

$$\begin{cases}(a,b)\ll(a',b')\\(a',b')\ll(a,b)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<a' \text{ ou } (a=a' \text{ et } b\le b')\\a'<a \text{ ou } (a'=a \text{ et } b'\le b)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a<a'\\a'<a\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}a<a'\\a'=a \text{ et } b'\le b\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}a=a' \text{ et } b\le b'\\b'<b\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}a=a' \text{ et } b\le b'\\a'=a \text{ et } b'\le b\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=a' \text{ et } b\le b'\\a'=a \text{ et } b'\le b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=a'\\b=b'\end{cases}\Rightarrow(a,b)=(a',b')$$

$\ll$ est antisymétrique.

Si $(a,b)\ll(a',b')$ et $(a',b')\ll(a'',b'')$ alors

$$\begin{cases}a<a'\\ ou\\ a=a'\; et\; b\le b'\end{cases} \text{ et } \begin{cases}a'<a''\\ ou\\ a'=a''\; et\; b'\le b''\end{cases}$$

Si $a<a'$ et $a'<a''$ alors $a<a''$ donc $(a,b)\ll(a'',b'')$

Si $a<a'$ et $a'=a''\; et\; b'\le b'$ alors $a<a''$ donc $(a,b)\ll(a'',b'')$.

Si $a=a'\; et\; b\le b'$ et $a'<a''$ alors $a<a''$ donc $(a,b)\ll(a'',b'')$.

Si $a=a'\; et\; b\le b'$ et $a'=a''\; et\; b'\le b''$ alors $a=a''$ et $b\le b''$ donc $(a,b)\ll(a'',b'')$.

Soit (a_1,b_1) et (a_2,b_2) deux couples de $\mathbb{R}^2$.

Si $a_1 < a_2$ ou si $a_2 < a_1$ alors $(a_1, b_1) \ll (a_2, b_2)$ ou $(a_2, b_2) \ll (a_1, b_1)$.
Si $a_1 = a_2$ alors soit $b_1 \leq b_2$ soit $b_2 \leq b_1$ donc $(a_1, b_1) \ll (a_2, b_2)$ ou $(a_2, b_2) \ll (a_1, b_1)$.
La relation $\ll$ est donc une relation d'ordre totale.

Allez à : Exercice 20 :

Correction exercice 21 :

$A\Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$ a zéro élément. Donc on a $A\mathcal{R}$A. $\mathcal{R}$ est réflexive.
Si $A\mathcal{R}B$, $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ est un ensemble fini qui a un nombre pair d'éléments.
Alors $B\Delta A = (B \cup A) \setminus (B \cap A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A\Delta B$ est un ensemble fini qui a un nombre pair
d'éléments. Donc $\mathcal{R}$ est réflexive.
Si $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C$ alors $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ est un ensemble fini qui a un nombre pair d'éléments et $B\Delta C = (B \cup C) \setminus (B \cap C)$ est un ensemble fini qui a un nombre pair d'éléments.
Comme $A \cap B \subset A \cup B$, $Card\big((A \cup B) \setminus (A \cap B)\big) = Card(A \cup B) - Card(A \cap B)$

$$Card(A\Delta B) = Card(A \cup B) - Card(A \cap B) = Card(A) + Card(B) - 2Card(A \cap B) = 2n$$

$$Card(B\Delta C) = Card(B \cup C) - Card(B \cap C) = Card(B) + Card(C) - 2Card(B \cap C) = 2m$$

Donc $Card(A) = -Card(B) + 2Card(A \cap B) + 2n$ et $Card(C) = -Card(B) + 2Card(B \cap C) + 2m$

Donc

$$\begin{aligned} Card(A\Delta C) &= Card(A \cup C) - Card(A \cap C) = Card(A) + Card(C) - 2Card(A \cap C) \\ &= -Card(B) + 2Card(A \cap B) + 2n - Card(B) + 2Card(B \cap C) + 2m \\ &= 2Card(A \cap B) + 2n - 2Card(B) + 2Card(B \cap C) + 2m \end{aligned}$$

C'est un nombre fini et pair donc $A\mathcal{R}C$, $\mathcal{R}$ est transitive.
Finalement $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Allez à : Exercice 21 :